**580.** D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: Radford L., D'Amore B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México). 177-196.

# Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido[1]

**Bruno D'Amore**

NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bolonia, Italia
Facultad de Ciencia de la Formación, Universidad de Bolzano, Italia
Alta Escuela Pedagógica, Locarno, Suiza
MESCUD, Universidad Distrital "F. José de Caldas", Bogotá, Colombia

*Summary*. In this paper I want to show a consequence that sometimes reveals in treatment and conversion semiotic transformations of a semiotic representation whose sense derives from a shared practice; the shift from a representation of a mathematical object to another through transformations, on the one hand maintains the meaning of the object itself, but on the other sometimes can change its sense. This is shown in detail through an example, although it is inserted within a wide theoretical framework that takes into account mathematical objects, their meanings and their representations.

*Resumen*. En este artículo intento mostrar una consecuencia que algunas veces se evidencia en las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión de una representación semiótica, cuyo sentido deriva de una práctica compartida; el pasaje de la representación de un objeto matemático a otra, por medio de transformaciones, de una parte conserva el significado del objeto mismo, pero, en ocasiones, puede cambiar su sentido. Este hecho está aquí detalladamente evidenciado por medio de un ejemplo, pero insertándolo en el seno de un amplio marco teórico que pone en juego los objetos matemáticos, sus significados y sus representaciones.

Este trabajo está dividido en dos partes. En la primera parte se discuten aspectos de carácter epistemológico, ontológico y semiótico desarrollados en algunos marcos teóricos de investigación en didáctica de la matemática.
En la segunda, a través de la narración de un episodio de sala de clase, se propone una discusión sobre la atribución de sentidos diversos de varias representaciones semióticas en torno a un mismo objeto matemático.

## Primera parte

## 1. Un recorrido

### 1.1. *Ontología y conocimiento*

En diversos trabajos de finales de los años 80 y 90 se declaraba que, mientras el matemático puede no interrogarse sobre el *sentido* de los *objetos matemáticos* que usa o sobre el sentido que tiene el *conocimiento matemático*, la didáctica de la matemática no puede obviar dichas cuestiones (ver D'Amore, 1999, pp. 23-28). En un trabajo reciente, Radford resume la situación de la manera siguiente:

> Se puede sobrevivir muy bien haciendo matemática sin adoptar una ontología explícita, esto es, una teoría sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. Es por eso que es casi imposible inferir de un

[1] Trabajo desarrollado dentro del programa estratégico de investigación: *Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*, con fondos de la Universidad de Bologna.

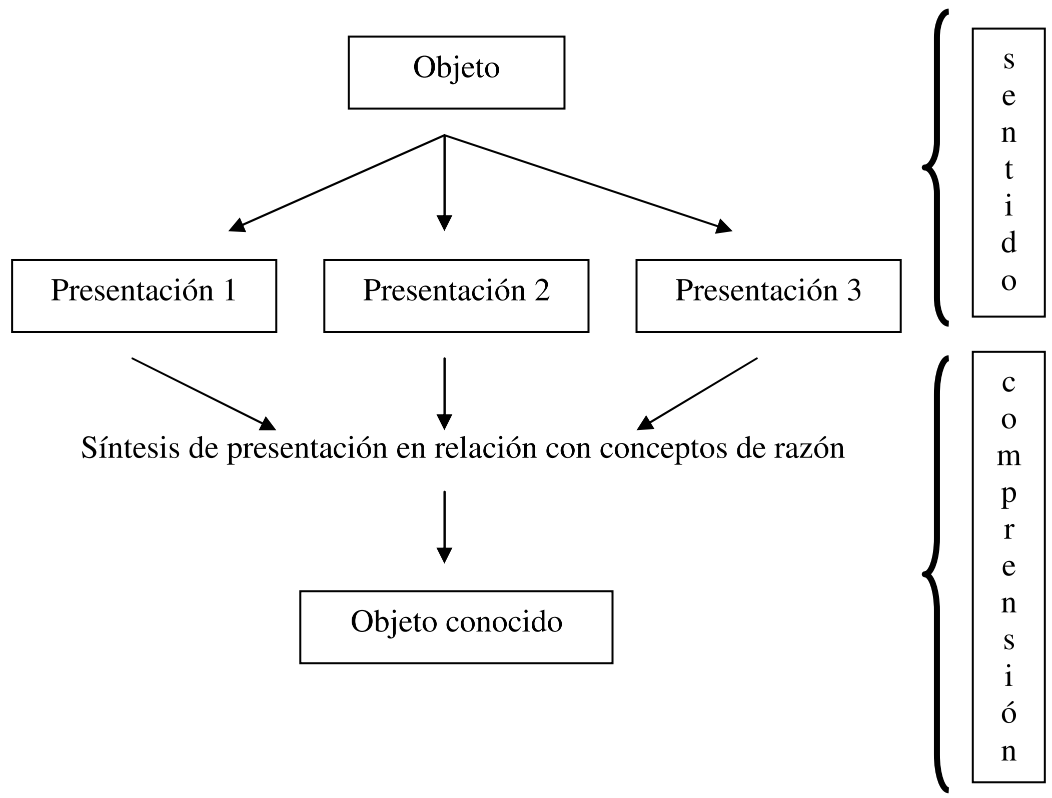
> artículo técnico en matemáticas la posición ontológica de su autor. (...) La situación es profundamente diferente cuando hablamos del *saber matemático*. (…). Cuestiones teóricas acerca del contenido de ese saber y de la manera como dicho contenido es transmitido, adquirido o construido nos ha llevado a un punto en el que no podemos seguir evitando hablar seriamente de ontología. (Radford, 2004, p. 6)

El debate es antiguo y se puede señalar como punto de partida la Grecia clásica. Como he señalado en trabajos anteriores, dicho debate está enmarcado por una creencia ontológica que parte del *modo* que tienen los seres humanos de *conocer* los conceptos (D'Amore, 2001a,b; 2003a,b). Radford retoma el debate y se detiene, en particular, en el trabajo de Kant quien dice que los individuos tienen un conocimiento conceptual *a priori* gracias a una actividad autónoma de la mente, independiente del mundo concreto (Radford, 2004, pp. 5-7).

Como Radford pone en evidencia, el apriorismo kantiano tiene raíces en la interpretación de la filosofía griega hecha por San Agustín y su influencia en los pensadores del Renacimiento. Refiriéndose al matemático Pietro Catena (1501-1576), por mucho tiempo profesor de la Universidad de Padua y autor de la obra *Universa Loca*, Radford afirma que, para Catena, "los objetos matemáticos eran entidades ideales e innatos" (Radford, 2004, p. 10). El debate se vuelve moderno, en todo el sentido de la palabra, cuando, con Kant, se logra hacer la distinción entre los "conceptos del intelecto" (humano) y los "conceptos de objetos". Como Radford observa:

> [Estos] conceptos del intelecto puro no son conceptos de objetos; son más bien esquemas lógicos sin contenido; su función es hacer posible un reagrupamiento o *síntesis* de las intuiciones. La síntesis es llevada a cabo por aquello que Kant identificó como una de nuestras facultades cognitivas: el entendimiento. (Radford, 2004, p. 15)

El siguiente gráfico presenta las ideas de *sentido* y de *comprensión* en el lugar adecuado:




La relación entre los sentidos y la razón en la epistemología Kantiana (tomado de Radford, 2004, p. 15)

1.2. *Aproximación antropológica*

La línea de investigación antropológica parece fundamental en la comprensión del pensamiento matemático (D'Amore, 2003b). Dicha línea de investigación debe atacar ciertos problemas, entre ellos el del uso de signos y artefactos en la cultura. En la aproximación antropológica al pensamiento matemático que propone Radford, el autor sugiere que una aproximación antropológica no puede evitar tomar en cuenta el hecho de que el empleo que hacemos de las diversas clases de signos y artefactos cuando intentamos llegar a conocer algo está subsumido en prototipos culturales de uso de signos y artefactos. (...) Lo que es relevante en este contexto es que el uso de signos y artefactos alteran la manera en que los objetos conceptuales nos son dados a través de nuestros sentidos (…). Resumiendo, desde el punto de vista de una epistemología antropológica, la manera en que me parece que puede resolverse el misterio de los objetos matemáticos es considerando dichos objetos como patrones (*patterns*) fijados de actividad humana; incrustados en el dominio continuamente sujeto a cambio de la práctica social reflexiva mediatizada. (Radford, 2004, p. 21)

En esta línea de pensamiento, existe una aceptación general de consenso:

Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los “objetos matemáticos” y que el “significado” de estos objetos esté íntimamente ligado con los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática. (D’Amore & Godino, 2006, p. 14)

1.3. *Sistema de prácticas*

Tal acuerdo viene ulteriormente clarificado por proposiciones explícitas:

La noción de “significado institucional y personal de los objetos matemáticos” implica a las de “práctica personal”, “sistema de prácticas personales”, “objeto personal (o mental)”, herramientas útiles para el estudio de la “cognición matemática individual” (Godino & Batanero, 1994; 1998). Cada una de tales nociones tiene su correspondiente versión institucional. Es necesario aclarar que con estas nociones se trata de precisar y hacer operativa la noción de “relación personal e institucional al objeto” introducida por Chevallard (1992) (D’Amore & Godino, 2006, p. 28)

Aquello que nosotros entendemos por “sistema de prácticas personales” está en la misma línea de la aproximación semiótica antropológica (ASA) de Radford:

En la aproximación semiótica antropológica (ASA) a la que estamos haciendo referencia, la idealidad del objeto conceptual está directamente ligada al contexto histórico-cultural. La idealidad de los objetos matemáticos –es decir de aquello que los vuelve generales– es completamente tributaria de la actividad humana. (Radford, 2005, p. 200)

Los aspectos sociológicos de esta adhesión a la actividad humana y a la práctica social son así confirmados:

Considero que el aprendizaje matemático de un objeto O por parte de un individuo I en el seno de la sociedad S no sea más que la adhesión de I a las prácticas que los otros miembros de S desarrollan alrededor del objeto dado O. (D’Amore, en D’Amore, Radford & Bagni, 2006, p. 21)

De igual manera, “la práctica de sala de clase puede considerarse como un sistema de adaptación del alumno a la sociedad” (Radford, en D’Amore, Radford & Bagni, 2006, p. 27).

1.4. *Objeto y objeto matemático*

Se necesita, sin embargo, dar una definición de este “objeto matemático”. Para lograrla preferimos recurrir a una generalización de la idea de Blumer sugerida por (Godino, 2002): *Objeto matemático* es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas. Esta idea es tomada de Blumer (1982, p. 8): un objeto es “cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo.

En un trabajo anterior hemos sugerido considerar los siguientes tipos de objetos matemáticos:

- “lenguaje” (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- “situaciones” (problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- “acciones” (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, ...)
- “conceptos” (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- “propiedad o atributo de los objetos” (enunciados sobre conceptos, ...)

- “argumentos” (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados, por deducción o de otro tipo, ...).

> A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías,... (D’Amore & Godino, 2006, pp. 28-29)

En el trabajo citado, se aprovecha la idea de función semiótica:

> se dice que se establece entre dos objetos matemáticos (ostensivos o no ostensivos) una función semiótica cuando entre dichos objetos se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, uno de ellos se pone en el lugar del otro o uno es usado por otro. (D’Amore & Godino, 2006, p. 30)

Y, más allá:

> Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales:
>
> - personal – institucional: como ya hemos indicado, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”; mientras que si estos sistemas son específicos de una persona los consideramos como “objetos personales”;
> - ostensivos (gráficos, símbolos, ...), no ostensivos (entidades que se evocan al hacer matemáticas, representados en forma textual, oral, gráfica, gestual, ...);
> - extensivo – intensivo: esta dualidad responde a la relación que se establece entre un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo *concreto*: la función y=2*x*+1) y una clase más general o *abstracta* (la familia de funciones, y = m*x*+n);
> - elemental – sistémico: en algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio;
> - expresión – contenido: antecedente y consecuente (significante, significado) de cualquier función semiótica.
>
> Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas “versiones” de dichos objetos. (D’Amore & Godino, 2006, p. 31)

Pero, si se hace referencia a la práctica de representación lingüística: “Creo que se deben distinguir dos tipologías de objetos en el ámbito de la creación de la competencia matemática (aprendizaje matemático): el objeto matemático mismo y el objeto lingüístico que lo expresa”. (D’Amore, en D’Amore, Radford & Bagni, 2006, p. 21)

En los siguientes partes de este articulo, será discutido lo referente a la representación, de forma especifica.

### 1.5. *Aprendizaje de objetos*

En los intentos hechos por sintetizar las dificultades en el aprendizaje de conceptos (D’Amore, 2001a, b, 2003a) he recurrido en varias ocasiones a la idea que se encuentra en la *paradoja de* Duval (1993):

> de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, de otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos sólo pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados con las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifican actividades matemáticas y actividades conceptuales y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. (Duval, 1993, p. 38)

Estas frases reclaman fuertemente no solamente un cierto modo de concebir la idea de semiótica sino también su relación con la epistemología. Como apunta Radford: “El problema epistemológico puede resumirse en la siguiente pregunta: ¿cómo llegamos a conocer los objetos generales, dado que no tenemos acceso a éstos sino a través de representaciones que nosotros mismos nos hacemos de ellos?". (Radford, 2005, p. 195)

1.6. *La representación de los objetos*

A propósito de la representación de los objetos, Radford menciona que

> En una célebre carta escrita el 21 de febrero de 1772, Kant pone en duda el poder de nuestras representaciones. En esta carta, enviada a Herz, Kant dice: "¿sobre qué fundamento reposa la relación de lo que llamamos representación y objeto correspondiente?". En esa carta, Kant cuestiona la legitimidad que tienen nuestras representaciones para representar fielmente al objeto. En términos semióticos, Kant cuestiona la adecuación del signo. (…) La duda kantiana es de orden epistemológico. (Radford, 2005, p. 195)

Todo esto pone en juego, de forma particular, la idea de signo, dado que para la matemática esta forma de representación es específica; el signo es de por sí especificación de lo particular, pero esto puede ser interpretado dando sentido a lo general; al respecto Radford nota que

> Si el matemático tiene derecho a ver lo general en lo particular, es, como observa Daval (1951, p. 110) 'porque está seguro de la fidelidad del signo. El signo es la representación adecuada del significado (*signifié*)' ". (Radford, 2005, p. 199)

Pero los signos son artefactos, objetos a su vez "lingüísticos" (en sentido amplio), términos que tienen el objetivo de representar para indicar:

> [La] objetivación es un proceso cuyo objetivo es mostrar algo (un objeto) a alguien. Ahora bien, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto? Esos medios son los que llamo *medios semióticos de objetivación*. Estos son objetos, artefactos, términos lingüísticos y signos en general que se utilizan con el fin de volver aparente una intención y de llevar a cabo una acción. (Radford, 2005, p. 203)

Estos signos tienen múltiples papeles, sobre los cuales no entro en detalle para evitar grandes tareas que ligan signo - cultura - humanidad: "la entera cultura es considerada como un sistema de signos en los cuales el significado de un significante se vuelve a su vez significante de otro significado o de hecho el significante del propio significado". (Eco, 1973, p. 156)

No último en importancia, es el "papel cognitivo del signo" (Wertsch, 1991; Kozoulin, 1990; Zinchenko, 1985) sobre el cual no profundizo con el fin de abreviar, pero, no sin antes reconocerlo, en las bases mismas de la semiótica general: "*todo proceso de significación entre seres humanos (...) supone un sistema de significaciones como propia condición necesaria*" (Eco, 1975, p. 20; el cursivo es del Autor), lo que quiere decir un acuerdo cultural que codifica e interpreta; es decir, produce conocimiento.

La elección de los signos, también y básicamente cuando se componen en lenguajes, no es neutra o independiente; esta elección señala el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación; por ejemplo:

> El lenguaje algebraico impone una sobriedad al que piensa y se expresa, una sobriedad en los modos de significación que fue impensable antes del Renacimiento. Impone lo que hemos llamado en otro trabajo una *contracción semiótica*. Presupone también la pérdida del *origo*. (Radford, 2005, p. 210)

La pérdida del *origo* (es decir del origen, del inicio) fue discutida por Radford también en otros trabajos (2000, 2002, 2003).

Y es propio sobre *este punto* que se cierra mi larga premisa, que es también el punto de partida para lo que sigue.

## Segunda parte

## 2. Objeto, su significado compartido, sus representaciones semióticas: la narración de un episodio

2.1. *El episodio*

Estamos en quinto de primaria y el docente ha desarrollado una lección en situación a-didáctica sobre los primeros elementos de la probabilidad, haciendo construir a los alumnos, por lo menos a través de unos ejemplos, la idea de “evento” y de “probabilidad de un evento simple”. Como ejemplo, el docente ha hecho uso de un dado normal de seis caras, estudiando los resultados casuales desde un punto de vista estadístico. Emerge una probabilidad frecuencial, pero que es interpretada en sentido clásico. En este punto el docente propone el siguiente ejercicio:

*Calcular la probabilidad del siguiente evento: lanzando un dado se obtenga un número par.*

Los alumnos, discutiendo en grupo y básicamente compartiendo prácticas bajo la dirección del docente, alcanzan a decidir que la respuesta se expresa con la fracción $\frac{3}{6}$ porque “los resultados posibles al lanzar un dado son 6 (el denominador) mientras que los resultados que hacen verdadero el evento son 3 (el numerador)”.

Después de haber institucionalizado la construcción de este saber, satisfecho de la eficaz experiencia, contando con que este resultado fue obtenido más bien rápidamente y con el hecho de que los alumnos han demostrado gran habilidad en el manejo de las fracciones, el docente propone que, dada la equivalencia de $\frac{3}{6}$ y $\frac{50}{100}$, se puede expresar esta probabilidad también con la escritura 50%, que es mucho más expresiva: significa que se tiene la mitad de la probabilidad de verificarse el evento respecto al conjunto de los eventos posibles, tomado como 100. Alguno de los alumnos nota que “entonces es válida también [la fracción] $\frac{1}{2}$”; la propuesta es validada a través de las declaraciones de quien hace la propuesta, rápidamente es acogida por todos y, una vez más, institucionalizada por el docente.

2.2. *Análisis semiótico*

Si se analizan las representaciones semióticas diferentes que han emergido en esta actividad, relativas al mismo evento: “obtener un número par al lanzar un dado”, son encontradas, por lo menos, las siguientes:

- registro semiótico lengua natural: probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado
- registro semiótico lenguaje de las fracciones: $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$, $\frac{1}{2}$
- registro semiótico lenguaje del porcentaje: 50%.

2.3. *El sentido compartido por diversas representaciones semióticas*

Cada una de las representaciones semióticas precedentes es el significante “aguas abajo” del mismo significado “aguas arriba” (Duval, 2003). El “sentido” compartido a propósito de aquello que se estaba construyendo estaba presente idénticamente y por tanto la práctica matemática efectuada y así descrita ha llevado a transformaciones semióticas cuyos resultados finales fueron fácilmente aceptados:

- conversión: entre la representación semiótica expresada en el registro lenguaje natural y $\frac{3}{6}$
- tratamiento: entre $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$ y $\frac{1}{2}$
- conversión: entre $\frac{50}{100}$ y 50%.

2.4. *Conocimientos previos necesarios*

Entran en juego diversos conocimientos, aparentemente cada uno de estos bien construido, que interactúan entre ellos:

- conocimiento y uso de las fracciones
- conocimiento y uso de los porcentajes

- conocimiento y uso del evento: obtener un número par lanzando un dado.

Cada uno de estos conocimientos se manifiesta a través de la articulación en un todo unitario y la aceptación de las prácticas en el grupo clase.

2.5. *Continuación del episodio: la pérdida del sentido compartido a causa de transformaciones semióticas*

Terminada la sesión, se propone a los alumnos la fracción $\frac{4}{8}$ y se pide si, siendo equivalente a $\frac{3}{6}$, también esta fracción representa el evento explorado poco antes. *La respuesta unánime y convencida fue negativa.* El mismo docente, que antes había dirigido con seguridad la situación, afirma que "$\frac{4}{8}$ *no puede* representar el evento porque las caras de un dado son 6 y no 8". El investigador pide al docente de explicar bien su pensamiento al respecto; el docente declara entonces que "existen no sólo dados de 6 caras, sino también dados de 8 caras; en tal caso, y sólo así, la fracción $\frac{4}{8}$ representa el resultado obtener un número par al lanzar un dado".

Examinaré lo que está sucediendo en el aula desde un punto de vista semiótico; pero me veo obligado a generalizar la situación.

## 3. Un simbolismo para las bases de la semiótica

En esta parte, son utilizadas las definiciones usuales y de la simbología introducida en otros trabajos (D'Amore, 2001a, 2003a,b):

semiótica $=_{df}$ representación realizada por medio de signos

noética $=_{df}$ adquisición conceptual de un objeto.[2]

Se indica, de ahora en adelante:

$r^m$ $=_{df}$ registro semiótico m-ésimo

$R^m_i(A)$ $=_{df}$ representación semiótica i-ésima de un concepto A en el registro semiótico $r^m$

($m = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, 3, \ldots$).

Se puede notar que, si cambia el registro semiótico, cambia necesariamente la representación semiótica, mientras que no es posible asegurar lo contrario; es decir, puede cambiar la representación semiótica manteniéndose aún el mismo registro semiotico.

Uso un gráfico para ilustrar la situación, porque me parece mucho más eficaz:[3]

características de la semiótica $\left\{\begin{array}{l}\textit{representación}\\ \textit{tratamiento}\\ \textit{conversión}\end{array}\right.$ (implican actividades cognitivas diversas)

concepto A para representar

$\Downarrow$

elección de los rasgos distintivos de A

$\Downarrow$

*REPRESENTACIÓN* de A: $R^m_i(A)$ en un registro semiótico dado $r^m$

$\Downarrow$

[2] Para Platón, la noética es el acto de concebir a través del pensamiento; para Aristóteles, es el acto mismo de comprensión conceptual.

[3] Hago referencia a Duval (1993).

transformaciones de representación *TRATAMIENTO*

nueva representación ($i \neq j$): $R^m{}_j(A)$ en el *mismo* registro semiótico $r^m$

transformación de registro *CONVERSIÓN*

nueva representación ($h \neq i$, $h \neq j$): $R^n{}_h(A)$ en *otro* registro semiótico $r^n$ ($n \neq m$)

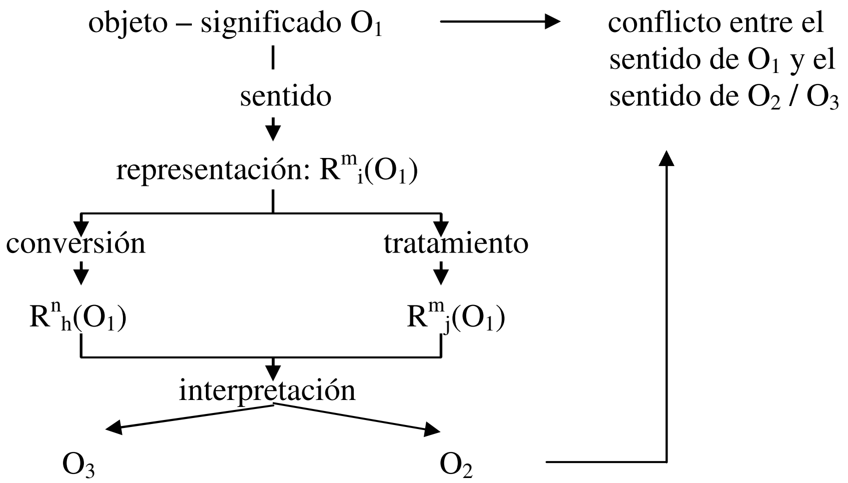
($m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \ldots$)

## 4. Volvamos al episodio

- Existe un objeto (significado) matemático $O_1$ por representar: probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado;
- se le da un *sentido* derivado de la experiencia que se piensa aceptada, en una práctica social construida en cuanto compartida en el aula;
- se elige un registro semiótico $r^m$ y en éste se representa $O_1$: $R^m{}_i(O_1)$;
- se realiza un tratamiento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_j(O_1)$;
- se realiza una conversión: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^n{}_h(O_1)$;
- se interpreta $R^m{}_j(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_2$;
- se interpreta $R^n{}_h(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_3$.

¿Qué relación existe entre $O_2$, $O_3$ y $O_1$?
Se puede reconocer identidad; y esto significa entonces que existe un conocimiento previo, en la base sobre la cual la identidad puede ser establecida.
De hecho, se puede no reconocer la identidad, en el sentido que la "interpretación" es o parece ser diferente, y entonces se pierde el *sentido* del objeto (significado) de partida $O_1$.

Un esquema como el siguiente puede resumir lo que ha sucedido en el aula desde un punto de vista complejo, que pone en juego los elementos que se desea poner en conexión entre ellos: objetos, significados, representaciones semióticas y sentido:




En el ejemplo aquí discutido:

- objeto - significado $O_1$: "probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado";
- sentido: la experiencia compartida como práctica de aula en situación a-didáctica y bajo la dirección del docente, lleva a considerar que el sentido de $O_1$ sea el descrito por los alumnos y

deseado por el docente: tantos resultados posibles y, respecto a estos, tantos resultados favorables al verificarse el evento;

- elección de registro semiótico $r^m$: números racionales Q expresados bajo forma de fracción; representación: $R^m{}_i(O_1)$: $\frac{3}{6}$;
- tratamiento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_j(O_1)$, es decir, de $\frac{3}{6}$ a $\frac{1}{2}$;
- tratamiento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_k(O_1)$, es decir, de $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$;
- conversión: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^n{}_h(O_1)$, es decir, de $\frac{3}{6}$ a 50%;
- se interpreta $R^m{}_j(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_2$;
- se interpreta $R^m{}_k(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_3$;
- se interpreta $R^n{}_h(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_4$.

¿Qué relación existe entre $O_2$, $O_3$, $O_4$ y $O_1$?
En algunos casos ($O_2$, $O_4$), se reconoce identidad de significantes; y esto significa que existe de base un conocimiento ya construido que permite reconocer el mismo objeto; el *sentido* está compartido, es único;
en otra situación ($O_3$), no se le reconoce la identidad de significante, en el sentido que la "interpretación" es o parece ser diferente, y entonces se pierde el *sentido* del objeto (significado) $O_1$.
La temática relativa a más representaciones del mismo objeto está presente en Duval (2005).

No está dicho que la pérdida de sentido se presente sólo a causa de la conversión; en el ejemplo aquí dado, tal como ya fue discutido, se presentó a causa de un tratamiento (el pasaje de $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$).

La interpretación de $\frac{4}{8}$ dada por el docente no admitía como objeto plausible el mismo $O_1$ que había tomado origen del sentido compartido que había llevado a la interpretación $\frac{3}{6}$.

## 5. Otros episodios

En seguida, son propuestos algunos ejemplos de interpretación solicitados a estudiantes que están cursando los últimos semestres en la universidad, programa de matemática; aquellos indicados como "sentidos" son mayormente compartidos entre los estudiantes entrevistados:

1)

$$x^2+y^2+2xy-1=0 \xrightarrow{\text{TRATAMIENTO}} x+y=\frac{1}{x+y}$$

sentido: de "una circunferencia" a "una suma que tiene el mismo valor de su recíproca"; Investigador: "Pero, ¿es o no es una circunferencia?"; A: "Absolutamente no, una circunferencia debe tener $x^2+y^2$"; B: "Si se simplifica, ¡si!" [es decir, es la transformación semiótica de tratamiento que da o no cierto *sentido*];

2)

$$n+(n+1)+(n+2) \longrightarrow 3n+3$$

sentido: de “la suma de tres naturales consecutivos” a “el triple de un número más 3”; Investigador: “Pero, ¿se puede pensar como suma de tres naturales consecutivos?”; C: “No, ¡no entra nada!”;

3)
$(n\text{-}1)+n+(n+1) \quad \Longrightarrow \quad 3n$

sentido: de “la suma de tres enteros consecutivos” a “el triple de un número natural”; Investigador: “Pero, ¿se puede pensar como suma de tres enteros consecutivos?”; D: “No, así no, así es la suma de tres números iguales, es decir $n$”.

**6. Representaciones de un mismo objeto dado por el docente de primaria, consideradas apropiadas para sus alumnos**

En un curso de actualización para docentes de primaria, fue discutido el tema: *Primeros elementos de probabilidad*. Al final de la unidad, se pidió a los docentes representar el objeto matemático: “obtener un número par al lanzar un dado”, usando un simbolismo oportuno que fuese el más apropiado, según ellos, a los alumnos de primaria. Fueron dadas a conocer todas las representaciones propuestas y se sometieron a votación. En seguida se muestran los resultados obtenidos en orden de preferencia (del mayor al menor):

$\frac{3}{6}$ 50% $\frac{1}{2}$ (tres y tres) $\frac{\bullet\bullet\bullet}{\circ\circ\circ}$ (tres sobre seis) $\frac{\circ\circ\circ}{6}$

(tres sobre seis) $\frac{\circ\circ\circ}{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$ (2, 4, 6 respecto de 1, 2, 3, 4, 5, 6) $2\cdot4\cdot6 \big/ 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$

(figural - operativa)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | $\boxed{2}$ | $\boxed{3}$ | $\boxed{4}$ | $\boxed{5}$ | $\boxed{6}$ |
| | $\downarrow$ | | $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| | OK | | OK | | OK |

La importancia de tomar en consideración el análisis de la producción de los alumnos es subrayada así por Duval (2003):

> No se puede subrayar la importancia de las descripciones, en la adquisición de conocimientos científicos así como en las primeras etapas de los aprendizajes matemáticos, sin afrontar otra cuestión fundamental tanto para la investigación como para los docentes: el análisis de las producciones de los alumnos. Pues es en el cuadro del desarrollo de la descripción, que se obtienen las producciones más personales y más diversificadas, dado que éstas pueden ser hechas verbalmente o con la ayuda de diseños, de esquemas ... En este caso se trata, para la investigación, de una cuestión metodológica y, para los docentes, de una cuestión diagnóstica. Veremos que cada análisis de las producciones de los alumnos requiere que se distinga con atención en cada producción semiótica, discursiva o no discursiva, *diversos niveles de articulación del sentido,* que no revelan las mismas operaciones. (p. 16)

En el ejemplo discutido en este parágrafo 6, los “alumnos” son docentes de escuela primaria que frecuentan el curso, mientras los “docentes” son los profesores universitarios que impartían las lecciones. [4]

[4] Que este “cambio de rol” pueda ser concebido como plausible es ampliamente demostrado por la literatura internacional; por brevedad me limito a citar sólo el amplio panorama propuesto en el ámbito PME por Llinares & Krainer (2006), con abundante bibliografía específica.

Diversos pueden ser los análisis de las precedentes producciones de los alumnos - docentes, evidenciadas al inicio de este parágrafo, pero se prefiere seguir la bipartición que, de nuevo, se encuentra en Duval (2003):

> [No] se debe confundir aquello que llamaremos una tarea "real" de descripción y una tarea "puramente formal" de descripción. (...). Una tarea de descripción es real cuando requiere una observación del objeto de la situación que se desea describir (...). Aquí, el alumno tiene acceso a cada uno de los dos elementos de la pareja {objeto, representación del objeto}, independientemente uno del otro. Al contrario, una tarea de descripción es puramente formal cuando se limita a un simple cambio de registro de representación: descripción verbal a partir de un diseño o de una "imagen" o viceversa. El alumno sólo tiene un acceso independiente al objeto representado. Las descripciones formales son entonces tareas de conversión que buscan respetar la invarianza de aquello que representan. (p. 19)

Creo que esta distinción de Duval ayuda a explicar, por lo menos en parte, el episodio narrado en los parágrafos 2 y 5 de este artículo:

> Respecto a un objeto matemático observable, conocido sobre la base de prácticas compartidas, la "descripción real" responde plenamente a las características del objeto, es decir de la práctica realizada alrededor de éste y con éste, y por tanto del *sentido* que todo esto adquiere por parte de quien dicha práctica explica. Pero el uso de transformaciones semióticas a veces lleva a cambios sustanciales de dichas descripciones, convirtiéndose en una "descripción puramente formal", obtenida con prácticas semióticas sí compartidas, pero que niegan un acceso al objeto representado o, mejor, le niegan la conservación del *sentido*. (Duval, 2003, p. 18)

## 7. Otros episodios semióticos tomados de la práctica matemática compartida en aula

7.1. *Probabilidad y fracciones*

He repetido el experimento descrito en el parágrafo 2. con estudiantes que han aprobado cursos más avanzados de matemática y con estudiantes en formación como futuros docentes de escuela primaria y de secundaria. Si la conversión que hace perder el sentido en el pasaje de tratamiento de $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$ es un ejemplo fuerte de pérdida de sentido, lo es aún más el de pasar de $\frac{3}{6}$ a $\frac{7}{14}$; mientras lo es en menor medida la conversión de $\frac{3}{6}$ a 0.5.

7.2. *Un ejemplo en el primer año de escuela secundaria superior*

Objeto matemático: El gasto total de *y* € para el alquiler de algún instrumento por *x* horas a *a* € cada hora, más el costo fijo de *b* €; los alumnos y el docente llegan a la representación semiótica: $y=ax+b$; se sigue la transformación de tratamiento que lleva a $x-\frac{y}{a}+\frac{b}{a}=0$, que se representa como:

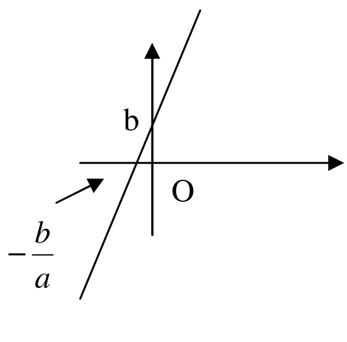



Figura 1

y es interpretada universalmente como "una recta".

Dicha representación semiótica obtenida por tratamiento y conversión, a partir de la representación inicial, no se le reconoce como el mismo objeto matemático de partida; ésta asume otro *sentido*.

7.3. *Un ejemplo en un curso para docentes de escuela primaria en formación*
Objeto matemático: La suma (de Gauss) de los primeros 100 números naturales positivos; resultado semiótico final después de sucesivos cambios operativos con algunas transformaciones de conversión y tratamiento: 101×50; esta representación no se reconoce como representación del objeto de partida; la presencia del signo de multiplicación dirige a los futuros docentes a buscar un sentido en objetos matemáticos en los cuales aparezca el término “multiplicación (o términos similares).

7.4. *Un primer ejemplo en un curso (postgrado) de formación para futuros docentes de escuela secundaria*
Objeto matemático: La suma de dos cuadrados es menor que 1; representación semiótica universalmente aceptada: $x^2+y^2 < 1$; después de cambios de representación semiótica, siguiendo operaciones de tratamiento: $(x+iy)(x-iy) < 1$ y de conversión:

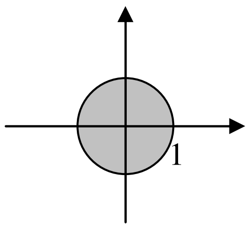



Figura 2

hasta llegar a: $\rho^2+i^2 < 0$.
No obstante que las diversas transformaciones se efectúen con total evidencia y en forma explícita, discutiendo cada uno de los cambios de registro semiótico, ninguno de los estudiantes futuros docentes, está dispuesto a admitir la unicidad del objeto matemático en juego. La última representación es interpretada como “desigualdad paramétrica en C”; el *sentido* fue modificado.

7.5. *Un segundo ejemplo en un curso (postgrado) de formación para futuros docentes de escuela secundaria*.
A) Objeto matemático: Sucesión de los números triangulares; interpretación y conversión: 1, 3, 6, 10, …; cambio de representación por tratamiento: 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,….; esta representación es reconocida como “sucesión de las sumas parciales de los naturales sucesivos”.
B) Objeto matemático: Sucesión de los números cuadrados; interpretación y conversión: 0, 1, 4, 9,…; cambio de representación por tratamiento: 0, (0)+1, (0+1)+3, (0+1+3)+5,…; esta representación es reconocida como “suma de las sumas parciales de los impares sucesivos”.

En ninguno de los casos precedentes descritos brevemente, los alumnos pudieron aceptar que el *sentido* de la representación semiótica obtenida finalmente, *después* de transformaciones semióticas evidenciadas, coincide con el *sentido* del objeto matemático de partida.

## 8. Conclusiones

No parecen necesarias largas conclusiones. Urge sólo evidenciar cómo el *sentido* de un objeto matemático sea algo mucho más complejo respecto a la pareja usual (objeto, representaciones del objeto); existen relaciones semióticas entre las parejas de este tipo:

(objeto, representación del objeto) – (objeto, otra representación del objeto), relaciones derivadas de transformaciones semióticas entre las representaciones del mismo objeto, pero que tienen el resultado de hacer perder el sentido del objeto de partida. Si bien, tanto el objeto como las transformaciones semióticas son el resultado de prácticas compartidas, los resultados de las transformaciones pueden necesitar de otras atribuciones de sentido gracias a otras prácticas compartidas. Lo que enriquece de mayor interés todo estudio sobre ontología y conocimiento.

Los fenómenos descritos en la primera parte de este artículo pueden ser usados para completar la visión que Duval ofrece del papel de las múltiples representaciones de un objeto en la comprensión de dicho objeto, y también para "romper el círculo vicioso" de su paradoja. En realidad cada representación lleva asociado un "subsistema de prácticas" diferentes, de donde emergen objetos diferentes (en el parágrafo anterior denominados: $O_1$, $O_2$, $O_3$ y $O_4$). Pero la articulación de estos objetos en otro más general requiere un cambio de perspectiva, el paso a otro contexto en el que se plantee la búsqueda de la *estructura común* en el sistema de prácticas global en el que intervienen los distintos "objetos parciales".
Sin duda, el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto, pero también su complejidad. El objeto matemático se presenta, en cierto sentido, como único, pero en otro sentido, como múltiple. Entonces, ¿cuál es la naturaleza del objeto matemático? No parece que haya otra respuesta que no sea la estructural, formal, gramatical (en sentido epistemológico), y al mismo tiempo la estructural, mental, global (en sentido psicológico) que los sujetos construimos en nuestros cerebros a medida que se enriquecen nuestras experiencias.

Es obvio que estas observaciones abren las puertas a futuros desarrollos en los cuales las ideas que parecen diversas, confluyen por el contrario en el intento de dar una explicación a los fenómenos de atribución de sentido.

**Referencias**

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method.* Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall.
Catena P. (1992). *Universa loca in logicam Aristetolis in mathematicas disciplinas*. (Editor G. Dell'Anna). Galatina (Le): Congedo.
Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12, 1, 73-112.
D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Con una carta de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio].
D'Amore, B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. 35, 90-106].
D'Amore, B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. 27, 51-76].
D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51. [Versión preliminar reducida en idioma español: D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en

matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 11, 63-71].

D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla. México DF, México: Reverté-Relime.]. [Versión en idioma portugués: D'Amore, B. (2005). *As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matematica*. Prefácio da edição italiana: Guy Brousseau. Prefácio: Ubiratan D'Ambrosio Tradução: Maria Cristina Bonomi Barufi. Escrituras: São Paulo].

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 7-36.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 29B, 1, 11-40.

Daval, R. (1951). *La métaphysique de Kant*. París: PUF.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.

Duval, R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels 'apprentissages premiers' de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 8, 13-62.

Duval, R. (2005). Transformations de représentations sémiotiques et démarche de pensée en mathématiques. Colloque COPIRELEM, Strasbourg, 30 mayo - 1 junio 2006. Actas en curso de impresión.

Eco, U. (1973). *Segno*. Milano: ISEDI.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22, 2/3, 237-284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer A. P.

Kozoulin, A. (1990). *Vygotsky's psychology*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers B.V. En curso de impresión.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*. 42, 3, 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*. 22, 2, 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical thinking and learning*. 5, 1, 37-70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*. 2, 191-213.

Wertsch, JV. (1991). *Voices in the mind. A sociocultural approach to mediate action*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Zinchemko, VP. (1985). Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind. In J.V.Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla
con la colaboración de Juan Díaz Godino